ماخ

به نام خدا

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

دفترچه سؤالات و پاسخ تشریحی
مرحله اول
هفدهمین دوره‌ی المپیاد کامپیوتر سال ۱۳۸۵

تعداد سوالات		مدت آزمون (دقیقه)
سوالات چند گزینه‌ای	مساله‌های تشریحی	
۴۰	-	۲۴۰

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

تذکرات آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

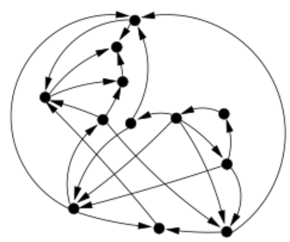
- این آزمون شامل **۴۰ سؤال چند گزینه‌ای** و وقت آن **۲۴۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز **نیست**.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

۱- یک عدد را متفرّقه می‌نامیم هرگاه تمام ارقامش متفاوت باشند و صفر در ارقامش ظاهر نشده باشد. اعداد ۱۲۴، ۴۸۲۱، ۵۹۶۷۸۳، ... مثال‌هایی از اعداد متفرقه‌اند. عمل «دوران» روی یک عدد متفرّقه به این صورت است که رقم یکان آن عدد را برداشته و در سمت چپ آن عدد قرار می‌دهیم. مثلاً اعداد ۱۲۴، ۴۸۲۱ و ۵۹۶۷۸۳ با این عمل به ترتیب به اعداد ۴۱۲، ۱۴۸۲ و ۳۵۹۶۷۸ تبدیل می‌شوند. تمام اعداد سه رقمی متفرّقه را روی یک تخته نوشته و سپس عمل «دوران» را روی همه‌ی این اعداد اعمال می‌کنیم. جمع اعداد حاصل چه‌قدر است؟

الف) ۵۵۵۰۰۰ ب) ۴۰۴۵۹۵ ج) ۴۹۸۹۴۵ د) ۴۹۴۵۵۰ هـ) ۴۹۴۹۴۹

۲- هر سال، هر نهنگی که متوجه شود هیچ نهنگ زنده‌ای را دوست ندارد، خودکشی می‌کند. شکل روبرو یک جامعه از نهنگ‌ها را نشان می‌دهد. اگر نهنگ A به B پیکان داشته باشد، یعنی A ، B را دوست دارد.

چند سال طول می‌کشد تا همه‌ی این نهنگ‌ها خودکشی کنند؟



الف) ۸ ب) ۹ ج) ۱۰ د) ۱۱ هـ) هیچ‌کدام

۳- نمایندگان شرکت‌های تولید کننده‌ی گوشت، مورد بازجویی قرار گرفتند. اظهارات آنان بدین شرح است:

- شرکت A : شرکت B گوشت فاسد به مردم می‌دهد.
- شرکت B : شرکت A گوشت فاسد به مردم می‌دهد.
- شرکت C : شرکت‌های A و B، هر دو گوشت فاسد به مردم می‌دهند.
- شرکت D : از بین شرکت ما و شرکت A حداقل یکی گوشت فاسد به مردم می‌دهد.

نماینده‌ی هر شرکتی که از گوشت فاسد استفاده می‌کند، از آنجا که آدم بدی است، همواره دروغ می‌گوید. همچنین، نماینده‌ی هر شرکتی که گوشت سالم به مردم می‌دهد، همواره راست می‌گوید. چند شرکت از گوشت فاسد استفاده می‌کنند؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ هـ) نمی‌توان با اطمینان پاسخ گفت.

۴- می‌خواهیم در یک جعبه‌ی مکعبی n×n×n، یک جسم سه بُعدی نامعلوم را قرار بدهیم که:

- دقیقاً از تعداد صحیحی مکعب ۱×۱×۱ تشکیل شده باشد.
- یک تکّه باشد؛ اگر یک نقطه از آن را گرفته و جسم را به سمت بالا بکشیم، به‌طور کامل بالا بیاید. فرض کنید دو مکعب کوچک (۱×۱×۱) حتی اگر در یک نقطه (مثلاً گوشه) با هم تماس داشته باشند، آن‌گاه به هم چسبیده‌اند.
- اگر در جعبه را ببندیم و جعبه را تکان بدهیم، جسم در داخل آن ثابت بماند. می‌توانید فرض کنید اتّصالات جسم (حتی در گوشه‌ها) بسیار محکم هستند!

حداقل حجم چنین جسمی چند واحد مکعب است؟

الف) ۳n - ۲ ب) ۳n - ۳ ج) ۲n د) ۲n -۱ هـ) n

۵- دو نفر این بازی را انجام می‌دهند: آن‌ها در یک جدول $1 \times n$ (یک سطر با n خانه) به نوبت مهره می‌گذارند. هر خانه‌ی جدول گنجایش یک مهره را دارد و در ابتدا جدول خالی است. نفر اوّل در هر حرکت یک مهره‌ی سفید و نفر دوم در هر حرکت یک مهره‌ی سیاه در یک خانه خالی می‌گذارند. وقتی مهره‌ای – مثل A – در جدول قرار می‌گیرد، اگر مهره‌ای همرنگ A – مثل B – در جدول باشد و تمام خانه‌های بین A و B با مهره‌هایی با رنگی مخالفِ رنگِ A پر شده باشند، تمام مهره‌های بین A و B ، همرنگِ A می‌شوند. با اضافه کردن A به جدول ممکن است دو مهره مانند B در جدول (در دو طرف A) پیدا شوند که شرایط گفته شده را داشته باشند، که در این صورت عمل مذکور را در هر دو مورد انجام می‌دهیم.

بعد از n حرکت، تمام خانه‌های جدول پر می‌شوند و بازی تمام می‌شود. در این زمان اگر تعداد مهره‌های سفید درون جدول بیشتر باشد، نفر اول می‌برد، اگر تعداد مهره‌های سیاه بیشتر باشد، نفر دوم می‌برد، وگرنه مساوی می‌شوند. برای n های بزرگ‌تر از ۱۰، کدام جملات زیر درست‌اند؟

۱) برای n های فرد نفر اوّل راهکار برد دارد.

۲) برای n های فرد نفر دوم راهکار برد دارد.

۳) برای n های زوج نفر اوّل راهکار برد دارد.

۴) برای n های زوج نفر دوم راهکار برد دارد.

۵) برای n های زوج نفر اوّل راهکار نباختن دارد.

۶) برای n های زوج نفر دوم راهکار نباختن دارد.

الف) ۱ و ۳ و ۵ ب) ۲ و ۴ و ۶ ج) ۱ و ۴ و ۶ د) ۲ و ۳ و ۵ هـ) ۱ و ۵ و ۶

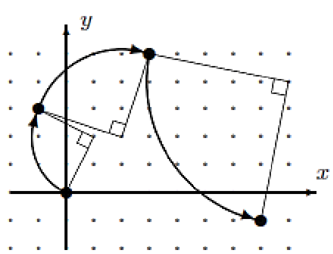
۶- ۱۳۸۵ نفر روی محور اعداد صحیح ایستاده‌اند، به‌طوری که نفر i اُم (۱۳۸۵ i ۱) روی نقطه به طول i قرار گرفته است. هر کدام از این افراد یک سنگ دارد و در یک لحظه همه با هم سنگشان را به طرف مثبت پرتاب می‌کند. بُردِ سنگ i اُم را با $f(i)$ نشان می‌دهیم. بدین ترتیب، سنگ نفر i اُم بعد از پرتاب در محل $i + f(i)$ قرار می‌گیرد. می‌دانیم به ازای هر x، $f(x)$ برابر است با تعداد «صفر»ها در نمایش مبنای دوی x (سمت چپ‌ترین رقم در نمایش مبنای دو همواره یک است). به عنوان مثال، f(۱۳) برابر است با ۱، زیرا نمایش مبنای دوی ۱۳ به صورت «۱۱۰۱» می‌باشد که سه عدد «۱» و یک عدد «۰» دارد.

بعد از این‌که همه سنگ خود را پرتاب کردند، دورترین سنگ کجا می‌افتد؟ (بزرگ‌ترین مکانی که در آن حداقل یک سنگ قرار می‌گیرد کجاست؟)

الف) ۱۳۸۵ ب) ۱۳۸۶ ج) ۱۳۹۰ د) ۱۳۹۱ هـ) ۱۳۹۵

۷- یک میمون در نقطه‌ی (۰ , ۰) صفحه‌ی مختصات قرار دارد. این میمون در هر حرکت می‌تواند نقطه‌ای با مختصات صحیح را انتخاب کند که از نقطه‌ی فعلی‌اش، فاصله‌ای بیشتر از ۱۰ واحد نداشته باشد. سپس، حول آن ۹۰ درجه دوران یافته و در نقطه‌ی جدید قرار بگیرد.

نمونه‌ای از حرکت‌های میمون را در شکل مشاهده می‌کنید. این میمون به چند تا از نقطه‌های زیر می‌تواند برسد؟



(۵ , ۱۳) (۱۳ , ۲۱) (۲۱ , ۳۳)

(۵۵ , ۲۵۵) (۱۰۲۴ , ۲۰۴۸) (۱۳۸۵ , ۲۰۰۷)

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۴ د) ۵ هـ) ۶

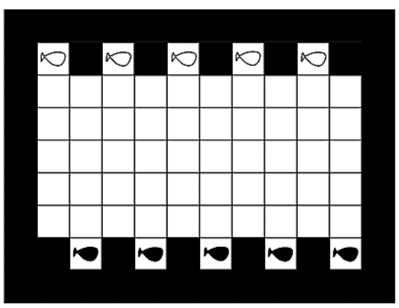
۸- یک جدول ۵×۵ داریم، که در هر خانه‌ی آن یک تخم‌مرغ قرار دارد. می‌خواهیم تعدادی از این تخم‌مرغ‌ها را برداریم. در هر خانه که قرار داشته باشیم یا از آن رد شویم، می‌توانیم تخم‌مرغ آن خانه را برداریم. در ابتدا از یکی از خانه‌های جدول شروع به حرکت می‌کنیم. در هر مرحله دقیقاً یک حرکت انجام می‌دهیم و در هر حرکت به یکی از خانه‌های مجاور (دارای ضلع مشترک با خانه‌ی فعلی) می‌رویم. اگر در مرحله‌ای جهت حرکت ما تغییر کند (از افقی به عمودی یا از عمودی به افقی)، باید ۱ تومان جریمه بدهیم. اگر ما ۵ تومان پول داشته باشیم، حداکثر چند تخم‌مرغ می‌توانیم برداریم؟

الف) ۲۰ ب) ۲۱ ج) ۲۲ د) ۲۴ هـ) ۲۵

۹- ۱۲ نهنگ که قصد خودکشی دارند، در یک صف قرار گرفته‌اند. یک روز صبح نهنگ‌ها تصمیم گرفتند که از آن روز به بعد، صبح هر روز، اگر نهنگ زنده‌ای در صف وجود داشته باشد، تعدادی (ناصفر) از این نهنگ‌ها خودکشی کنند. در صورتی که بعد از خودکشیِ صبح یک روز، هنوز نهنگ زنده‌ای در صف وجود داشت، همان شب هم تعدادی (ناصفر) خودکشی می‌کنند. واضح است که نهنگ‌ها به همان ترتیبی که در صف ایستاده‌اند خودکشی می‌کنند. این ۱۲ نهنگ به چند طریق می‌توانند خودکشی کنند، به‌طوری که در پایان تعداد نهنگ‌ها که در صبح خودکشی کرده‌اند، با تعداد نهنگ‌هایی که در شب خودکشی کرده‌اند برابر باشد؟

الف) ۷۲۰ ب) ۹۲۴ ج) ۴۶۲ د) ۳۶۰ هـ) ۱۴۴۰

۱۰- در شکل زیر هرکدام از مهره‌های داخل صفحه یک مهره‌ی ماهی است. مهره‌ی ماهی در صفحه سُر می‌خورد. یعنی در یکی از ۴ جهت حرکت می‌کند تا به یک خانه پُر برسد و در خانه‌ی قبل از خانه‌ی پُر متوقف می‌شود. قوانین بازی به شرح زیر است:



- سفید برنده است اگر یک مهره‌اش را به سطر آخر (پایین) برساند.
- سیاه برنده است اگر یک مهره‌اش را به سطر اوّل (بالا) برساند.
- خانه‌های سیاه و خانه‌هایی که مهره‌ای در آن‌ها هست، پر هستند.
- هرکس که نوبتش است، باید یکی از مهره‌هایش را جا به جا کند.
- کسی حق ندارد عکس حرکت قبلش را انجام دهد.
- سفید اوّل بازی می‌کند.

اگر هر دو نفر به بهترین نحو بازی کنند، کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟

الف) سفید، با انجام حداکثر ۴ حرکت می‌برد.

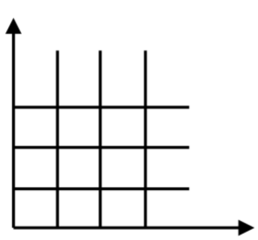
ب) سیاه، می‌تواند طوری بازی کند که سفید نتواند در چهار حرکت ببرد ولی سفید با حدّاکثر شش حرکت می‌برد.

ج) سیاه، با انجام حداکثر ۴ حرکت می‌برد.

د) سفید، می‌تواند طوری بازی کند که سیاه نتواند در چهار حرکت ببرد ولی سیاه با حدّاکثر شش حرکت می‌برد.

هـ) هیچ‌کدام

۱۱- ربع اول صفحه‌ی مختصات را مطابق شکل به خانه‌های ۱×۱ تقسیم می‌کنیم. به چند طریق می‌توان اعداد ۱ تا ۱۴ را در ۱۴ تا از این خانه‌ها نوشت به طوری که شرایط زیر برقرار باشند:

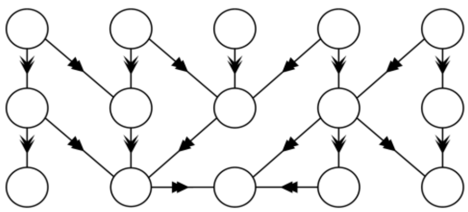


- در خانه‌ی (۱ , ۱) (پایین‌ترین و سمت چپ‌ترین خانه) عدد ۱ نوشته شده باشد.
- اگر در خانه‌ای عددی نوشته شده بود، دقیقاً در یکی از دو خانه‌ی پایینی یا سمت چپیِ آن خانه، عددی نوشته شده باشد.
- اگر در خانه‌ی (x,y) یعنی خانه‌ی سطر x اُم و ستون y اُم ، عدد $i > 1$ نوشته شده بود، هریک از اعداد ۱ تا $i-1$ ، در خانه‌ای مثل (x',y') قرار داشته باشند که $1 \leq x \leq x'$ و $1 \leq y \leq y'$.

الف) ۸۱۹۲ ب) ۱۶۳۸۴ ج) ۲۴۵۷۵ د) ۲۴۵۷۶ هـ) هیچ‌کدام

۱۲- در شکل روبرو، ۱۵ دفتر اداریِ یک سازمان نشان داده شده است. هر دفتر، تعدادی دفتر زیردست دارد. این ارتباط در شکل با پیکان‌هایی از دفترها به دفترهای زیردستشان نمایش داده شده است. هر دفتر، بدین صـــورت عمل می‌کـند: هر نامه‌ای را که دریافت می‌کـنـد، بـرای هرکدام از دفترهای زیردستش کپی می‌کند و می‌فرستد (دفترهای زیردست هم همین‌کار را انجام می‌دهند). دفترهای ردیف بالا از چپ به راست به ترتیب شماره‌های ۰ تا ۴ را دارند. طیِ ۲۰۰۷ روز، این دفترها به این صورت کار کرده‌اند که در روز i اُم ($۱ \leq i \leq ۲۰۰۷$) از بیرون سازمان به دفتر k اُم ردیف بالا ($۱ \leq k \leq ۴$)، i+k نامه می‌رسد.

اگر پس از انجام همه‌ی این عملیات اداری طی این ۲۰۰۷ روز، مجموع تعداد نامه‌های دریافت شده توسط اداره‌های سطر پایین، n باشد، باقی‌مانده تقسیم عددn بر ۵ کدام است؟

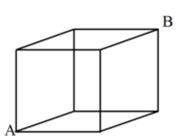


الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ هـ) ۴

۱۳- یک جوجه در گوشه‌ی پایین و سمت چپ مستطیلی به طول ۹۹ و عرض ۵۹ قرار گرفته است. این جوجه می‌خواهد با تعدادی «حرکت»، خود را به گوشه‌ی بالا سمت راست این مستطیل برساند. جوجه در هر حرکت مـی‌توانـد به انـدازه‌ی توانـی از دو (یعنـی ۱ یا ۲ یا ۴ یا ... واحد) به سمت راست یا بالا حرکت کند، به شرط آن‌که از جدول خارج نشود. او به چند طریق می‌تواند به مقصد برسد به طوری‌که کم‌ترین تعداد «حرکت» را انجام داده باشد؟

الف) ۵۷۶۰ ب) ۱۲۶ ج) ۲۸۸۰ د) ۳۶۲۸۸۰ هـ) هیچ‌کدام

۱۴- مورچه‌ای می‌خواهد در مکعب روبرو از رأس A ، با حرکت روی پاره‌خط‌ها، به رأس B (رأس مقابل A) برود. فرض کنید در هر حرکت مورچه از یک سر پاره‌خط به سر دیـــگر آن مـی‌رود. می‌دانیـم بعد از ۵ حرکت مورچـه روی رأس قـرار دارد. او بـه چنـد طریق می‌توانسته این مسیر را طی کرده باشد؟



الف) ۳۶ ب) ۴۸ ج) ۶۰ د) ۹۰ هـ) ۱۲۰

۱۵- در یک ردیف ۳۳ خانه قرار دارد، که با اعداد ۱ تا ۳۳ شماره‌گذاری شده‌اند. زِبل خان در یک طرف این خانه‌ها قرار دارد (در کنار خانه‌ی شماره‌ی ۳۳). در هر صبح یک توپ در یکی از خانه‌ها قرار می‌دهیم. زبل خان هـر روز ظهـر اگر توپـی دید به آن شلیـک می‌کـند و توپ می‌ترکد (حداکثر در هر روز به یک توپ شلیک می‌کند و فقط همان توپ می‌ترکد). اگر یک توپ در خانه‌ی i باشد، زبل خان خانه‌های پشت آن را نمی‌بیند (خانه‌های ۱تا $i-۱$). دود حاصل از ترکیدن یک توپ در خانه‌یiام باعث می‌شود که زبل خان تا بعد از ظهر روز بعد نیز خانه‌های پشت آن را نبیند و در نتیجه اگر روز بعد توپی در آن خانه‌ها گذاشته شود، زبل خان آن را نمی‌بیند و به آن تیراندازی نمی‌کند. ما ۳۳ روز وقت داریم تا ۳۳ توپ در این خانه‌ها بگذاریم و همچنین در هر خانه حداکثر می‌توانیم یک‌بار توپ قرار دهیم. در پایان ۳۳ روز، به اندازه‌ی مجموع شماره‌ی خانه‌هایی که توپ در آن‌ها قرار دارد به ما جایزه می‌دهند. بیشترین جایزه‌ای را که می‌توان به دست آورد چقدر است؟

الف) ۱۳۶ ب) ۲۴۰ ج) ۲۵۶ د) ۲۷۲ هـ) ۲۸۹

۱۶- چند جدول ۳×۳ از اعداد ۰ تا ۸ داریم که هر دو خانه‌ی مجاور (دارای یک ضلع مشترک) در آن دقیقاً یکی از دو خاصیت زیر را داشته باشند:

- باقی‌مانده‌ی تقسیم اعداد آن دو خانه بر ۳ برابر باشد
- خارج‌قسمت تقسیم اعداد آن دو خانه بر ۳ برابر باشد

یکی از این جدول‌ها در شکل نشان داده شده است.

۱	۲	۰
۴	۵	۳
۷	۸	۶

الف) ۶ ب) ۱۸ ج) ۳۶ د) ۷۲ هـ) ۱۴۴

۱۷- بازی «تنبل‌کُش»، یک بازی یک نفره است که روی یک جدول ۳×۳ انجام می‌شود. در ابتدای بازی اعداد ۱ تا ۸ به ترتیب نامعینی در ۸ تا از خانه‌های جدول قرار گرفته‌اند و یکی از خانه‌های جدول خالی است. در هر حرکت می‌توان عدد یکی از خانه‌های مجاور ضلعیِ خانه‌ی خالی را به خانه‌ی خالی انتقال داد. هدف بازی این است که با حداقل تعداد انتقال، اعداد جدول به صورت شکل زیر، مرتّب شوند.
آقای «تنبل»، قصد دارد بدون انجام دادن بازی، حدس بزند که حداقل تعداد انتقال‌های لازم برای مرتّب کردن یک جدول چند حرکت است. از این رو، وی برای هریک از اعداد ۱ تا ۸، تعداد حرکت‌های لازم برای انتقال آن عدد به مکان مطلوب در جدول نهایی (با فرض خالی بودن تمام خانه‌های دیگر) را محاسبه کرده و مجموع این اعداد (k) را به عنوان حدس خود در نظر می‌گیرد.
اگر حداقل تعداد انتقال‌های لازم برای مرتّب کردن جدول و رسیدن به جدول نهایی را A بنامیم، کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟ فرض کنید جدول‌های ابتدایی مورد بحث، همواره پس از متناهی حرکت مرتّب می‌شوند.

۳	۲	۱
۶	۵	۴
	۸	۷

الف) برای تمامی جدول اوّلیه $K \leq \frac{A}{2}$
ب) برای تمامی جدول اوّلیه $\frac{A}{2} \leq K \leq A$
ج) برای تمامی جدول اوّلیه $K \leq A$ و جدولی اولیه وجود دارد که $K < \frac{A}{2}$
د) برای تمامی جدول اوّلیه $A \leq K \leq 2A$
هـ) هیچ‌کدام

۱۸- در بازی خرگوش‌کُشی یک جدول ۱۳۸۵×۱۳۸۵ داریم که در هر خانه‌ی آن یک خرگوش قرار دارد. «مردِ چکُش‌زن» بازی را شروع می‌کند. او در ابتدا یک خرگوش را به دلخواه خود با چکش می‌کشد. سپس در هر مرحله، اگر در سطر یا ستونی که خرگوش قبلی را کشته، خرگوش زنده‌ای باشد، مجبور است یکی از خرگوش‌های آن سطر یا آن ستون را بکشد (به دلخواه یکی از آنها را بکشد). در غیر این‌صورت، خرگوش زنده‌ای را از هر کجای جدول به دلخواه می‌کشد و بازی ادامه پیدا می‌کند. هدف ما پیدا کردن تعداد روش‌هایی است که مرد چکش‌زن می‌تواند همه‌ی خرگوش‌ها را بکشد. باقیمانده‌ی این عدد بر ۲۳ چند است؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۲۱ هـ) ۲۲

۱۹- در بازی خرگوش‌کُشی که در سؤال قبل گفته شد، هر بار که مرد خرگوشی را بکُشد که نه در سطرِ آن و نه در ستونِ آن، خرگوش زنده‌ی دیگری نباشد، یک امتیاز می‌گیرد (دقّت کنید که پس از کشتن خرگوش آخر نیز امتیاز می‌گیرد). او حداّکثر چند امتیاز می‌تواند بگیرد؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۱۳۸۴ د) ۱۳۸۵ هـ) ۱۳۸۶

۲۰- یک رشته به طول ۱۳ حرف، متشکل از حروف w و b را در نظر بگیرید. عمل به روز رسانی رشته برحسب عدد i ($1 \leq i \leq 13$) را به این ترتیب تعریف می‌کنیم: از حرف i ام از سمت چپ شروع به‌کار می‌کنیم. آن حرف را تغییر می‌دهیم (یعنی w را به b و b را به w تغییر می‌دهیم). درصورتی که با این تغییر، حرف i ام از b به w تبدیل شود به سراغ حرف بعدی یعنی حرف سمت راستیش (در صورت وجود) رفته و همین کار را انجام می‌دهیم.

به عنوان مثال رشته bwbbbbwwbbwww بعد از انجام عمل به روز رسانی روی حرف چهارم، به رشته‌ی bwbwwwbwbbwww تبدیل می‌شود. فرض کنید روی رشته‌ی wwwwwwwwwwwww عملیات زیر را به ترتیب انجام می‌دهیم:

۱) یک بار عمل به روز رسانی روی حرف دوم.

۲) یک بار عمل به روز رسانی روی حرف پنجم.

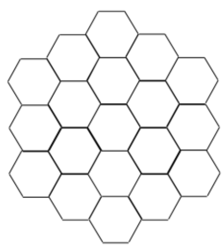
۳) هشت بار عمل به روز رسانی روی حرف یکم.

۴) بیست بار عمل به روز رسانی روی حرف ششم.

شما باید مشخص کنید که در نهایت تعداد bها در رشته‌ی حاصل از مراحل بالا چند تاست.

الف) ۹ ب) ۱۰ ج) ۴ د) ۵ هـ) ۳

۲۱- عبّاس می‌خواهد شکل ۱ را با ۶ قطعه از قطعاتی که در شکل ۲ نشان داده شده بپوشاند، به طوری که درست یک شش ضلعیِ پوشیده نشده در آن باقی بماند. او به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟

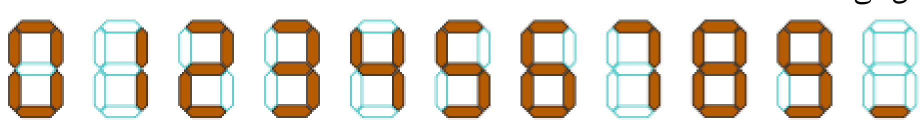


شکل ۱

شکل ۲

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۴ د) ۳ هـ) ۸

۲۲- آیدین یک ماشین حساب یک رقمی دارد که با ۷ لامپ باریک و دراز، هریک از ارقام ۰ تا ۹ و علامت « - » (به معنای خطای محاسبه) را مطابق شکل زیر نشان می‌دهد.



متأسفانه به دلیل فرسودگی ماشین حساب، همه‌ی ۷ لامپ آن هم‌زمان سوخته‌اند. اکنون آیدین می‌خواهد k تا از این لامپ‌ها را طوری با لامپ‌های سالم عوض کند که بتواند با دیدن روشن یا خاموش بودن لامپ‌های سالم، پی به مقدار دقیق ماشین حساب ببرد. دقّت کنید که اگر یک لامپ سالم در ماشین حساب قرار داده شود، دیگر نمی‌توان جای آن را تغییر داد. حداقل مقدار k برای این منظور چند است؟

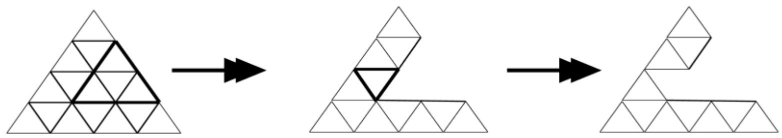
الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) ۶ هـ) ۷

۲۳- در ابتدا یک مثلث متساوی‌الاضلاع داریم که طول اضلاعش برابر ۴ است (مانند شکل سمت چپ).
در هر مرحله می‌توانیم یک تکه از شکل باقی‌مانده که شروط زیر را دارد بِکَنیم و دور بریزیم.

- تکه باید یک مثلث متساوی الاضلاع باشد.
- اضلاع تکه باید روی خطوط کشیده شده در شکل باشد.

• با حذف کردن این تکه از شکل نباید هیچ سوراخی در آن ایجاد شود. (یعنی باید حداقل یکی از اضلاع تکه‌ای که می‌خواهیم حذف کنیم، کاملاً مجاور ناحیه‌ی بیرونی باشد.)

بدیهی است در صورتی که شکل باقی‌مانده یک مثلث متساوی الاضلاع باشد می‌توان در یک مرحله همه‌ی آن را دور ریخت. در شکل زیر یک مثال تا دو مرحله نشان داده شده است.



می‌خواهیم در k مرحله کل شکل اوّلیّه را دور بریزیم. این کار به ازای چند تا از مقادیر زیر به عنوانِ مقدارِ k، امکان پذیر است؟

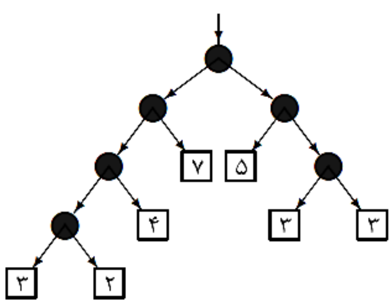
۴ ۵ ۷ ۱۰ ۱۴

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ هـ) ۵

۲۴- چند عدد طبیعی را می‌توان به صورت حاصل جمع چهار عدد متمایز از مجموعه‌ی {۱۵,۱۹,۲۳,۲۷,۳۱,۳۵,۳۹} نوشت؟

الف) ۳۵ ب) ۲۱ ج) ۱۳ د) ۱۲ هـ) ۷

۲۵- در شکل زیر ۲۷ نخود از بالا به سمت پایین انداخته می‌شود. نخودها به سمت پایین حرکت می‌کنند تا درون یکی از مربع‌ها قرار بگیرند. درون هر دایره یک علامت ↘ یا ↙ قرار دارد که در حالت عادی دیده نمی‌شود. با توجه به جهت علامت یک دایره، نخود پس از ورود به آن دایره به سمت «پایین سمت راست» یا «پایین سمت چپ» حرکت می‌کند. ما نمی‌توانیم در حالت عادی جهت علامت‌های دایره‌ها یا تعداد نخودهای موجود در مربع‌ها و دایره‌ها را ببینیم.



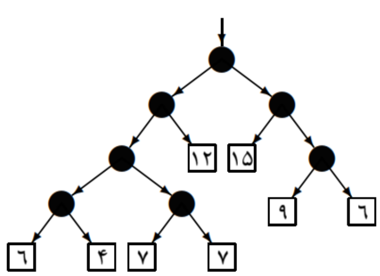
عمل «تغییر جهت» به این صورت تعریف می‌شود: به یکی از دایره‌ها از نزدیک نگاه می‌کنیم و علامت قرار داده شده در آن را می‌بینیم و اگر خواستیم آن را تغییر می‌دهیم.

ما می‌توانیم هر موقع که خواستیم انداختن نخودها را متوقف کنیم و عمل «تغییر جهت» را به تعداد دلخواه انجام دهیم و دوباره انداختن نخودها را ادامه دهیم.

می‌خواهیم تعدادی عمل «تغییر جهت» انجام دهیم، به طوری که وقتی همه‌ی ۲۷ نخود افتادند، در هر مربع دقیقاً به تعداد عددی که روی آن نوشته شده نخود قرار بگیرد. حداقل چند عمل «تغییر جهت» نیاز داریم به طوری که به هر نحوی که علامت‌ها در ابتدا جهت‌دهی شده باشند، بتوانیم این کار را انجام دهیم؟

الف) ۶ ب) ۷ ج) ۱۱ د) ۱۲ هـ) ۱۴

۲۶- در مسئله‌ی قبل، فرض کنید وقتی در یک مربع به تعداد عددی که روی آن نوشته شده نخود قرار بگیرد، از پُر شدن آن جعبه مطّلع می‌شویم. حال با توجه به داشتن این امکان اضافی بگویید، در شکل روبه رو، حداقل چند عمل «تغییر جهت» لازم است، تا جهت اوّلیّه‌ی علامت‌ها هرچه که باشد، بتوانیم به هر مربع دقیقاً به تعداد عددی که رویش نوشته شده نخود بفرستیم؟



الف) ۷ ب) ۸ ج) ۱۲ د) ۱۳ هـ) ۱۴

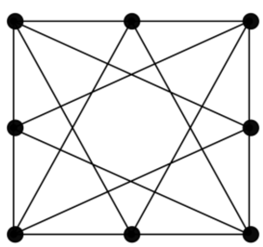
۲۷- ده شرکت تولید کننده‌ی کنسرو مورد آزمایش کیفیت قرار گرفتند. می‌دانیم که دقیقاً یکی از شرکت‌ها از گوشت فاسد استفاده می‌کند. آزمایش به این صورت بود که به هر داوطلب، دو کنسرو از دو شرکت مختلف داده شد و به هیچ دو نفری جفت کنسروهای یکسانی داده نشد. می‌دانیم اگر کسی کنسرو فاسد بخورد، می‌میرد. پس از این‌که داوطلب‌ها کنسروهایشان را خوردند، اطلاعات بدست آمده از مرگ داوطلبان برای یافتن شرکت متخلف کافی نبود. تعداد داوطلب‌ها حداکثر چند نفر بوده است؟

الف) ۲۰ ب) ۲۸ ج) ۲۹ د) ۳۶ هـ) ۴۵

۲۸- پینوکیو برای یافتن پدر ژِپتو وارد شکم نهنگ شد. شکم نهنگ به شکل مجموعه‌ای از سه راهی‌ها است که هرکدام به سه سه‌راهیِ دیگر متصل است. فاصله‌ی دو سه راهیِ متصل ۱ متر است. پدر ژپتو در یکی از سه راهی‌هاست. در هر سه راهی تابلویی وجود دارد که رویش فاصله‌ی آن سه راهی تا پدر ژپتو نوشته شده است. پینوکیو در یکی از این سه راهی‌هاست که تابلوی آن ۱۳۸۵ را نشان می‌دهد. با این فرض که پینوکیو به اندازه‌ی کافی باهوش است، در بدترین حالت، چند متر باید راه برود تا به پدر ژپتو برسد؟

الف) ۱۳۸۵ ب) ۲۷۷۱ ج) ۴۱۵۵ د) ۴۱۵۷ هـ) ۶۹۲۵

۲۹- در شکل روبرو ۸ شهر و راه‌های ارتباطی آن‌ها نمایش داده شده است. نیلوفر و لی‌لی می‌خواهند این شهرها را ببینند و با هم قرار گذاشته‌اند که عوارض ورود به شهرها را یکی در میان بپردازند. نیلوفر یکی از شهرها را برای شروع مسافرت انتخاب می‌کند و عوارض ورود به آن را می‌پردازد. از این به بعد، ابتدا لی‌لی و سپس نیلوفر، هرکدام در نوبت خود شهر مجاوری (شهری که به شهر فعلی راه مستقیم دارد) که هنوز ندیده‌اند را انتخاب می‌کند. سپس آن‌ها به آن شهر مسافرت می‌کنند و کسی که شهر جدید را انتخاب کرده، عوارض آن را پرداخت می‌کند. آن‌ها این‌کار را تا دیده‌شدن همه‌ی شهرها ادامه می‌دهند. هرکدام از این دو نفر می‌خواهد هزینه‌ی کمتری از دیگری بپردازد.



نیلوفر و لی‌لی قبل از آن که مقادیر عوارض شهرها را در کتابچه‌ی راهنمای سفر خود ببینند، حرف‌های زیر را زده‌اند. کدام یک از این گفته‌ها به ازای مقادیر مختلفی که ممکن است در دفترچه‌ی راهنما نوشته شده باشد همواره درست است؟

الف) نیلوفر: من کمتر خرج خواهم کرد.

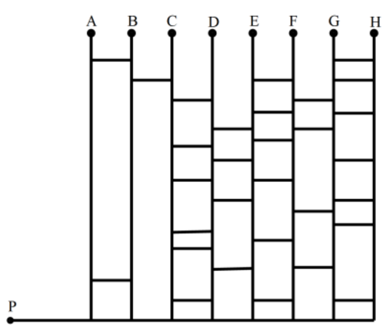
ب) لی‌لی: من کمتر خرج خواهم کرد.

ج) نیلوفر: ممکن است مقادیر دفترچه‌ی راهنما طوری باشد که من مجبور شوم بیشتر خرج کنم.

د) لی‌لی: مجبور نیستم بیشتر خرج کنم.

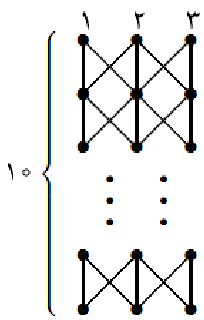
هـ) نیلوفر: مجبور نیستم بیشتر خرج کنم.

۳۰- نقشه‌ی خیابان‌های یک شهر مانند شکل روبرو است. خیابان‌های عمودی به سمت بالا یک‌طرفه و خیابان‌های افقی دوطرفه هستند. در هریک از نقاط A تا H یک پارکینگ قرار دارد. شخصی با اتومبیل خود از نقطه‌ی P به حرکت در می‌آید. با فرض این که این شخص از هیچ نقطه‌ای بیش از یک‌بار عبور نمی‌کند، تعداد راه‌های رسیدن او به هریک از نقاط A تا H را به ترتیب W_A تا W_H می‌نامیم. مقدار $W_A - W_B - W_C + W_D + W_E - W_F - W_G + W_H$ کدام‌یک از گزینه‌های زیر است؟



الف) ۲- ب) ۱- ج) ۰ د) ۲ هـ) هیچ‌کدام

۳۱- ۱۰ ردیف ۳ تایی از لامپ‌ها داریم. هر لامپ، مطابق شکل به تعدادی از لامپ‌های ردیف پایینی‌اش وصل شده است. در ابتدا همه‌ی لامپ‌ها خاموش‌اند. هر بار می‌توان یکی از لامپ‌های ردیف اول را تغییر وضعیت داد (لامپ روشن را خاموش کنیم یا برعکس). اگر لامپی تغییر وضعیت بدهد، تمامی لامپ‌های متصل به آن لامپ در ردیف پایینی‌اش، تغییر وضعیت می‌دهند. برای مثال، اگر وضعیت لامپ اول از طبقه اول را تغییر دهیم، وضعیت لامپ‌های اول و دوم ردیف دوم عوض می‌شوند. سپس وضعیت لامپ سوم از طبقه سوم تغییر خواهد کرد، ولی وضعیت‌های لامپ‌های اول و دوم از طبقه‌ی سوم، تغییری نخواهند کرد زیرا یک‌بار به وسیله‌ی لامپ اول طبقه‌ی دوم و یک‌بار به وسیله‌ی لامپ دوم طبقه‌ی دوم تغییر می‌کنند. چند تا از دنباله‌های زیر می‌توانند وضعیت لامپ‌های ردیف ۱۰ اُم پس از اعمال تغییراتی در ردیف اول باشند؟



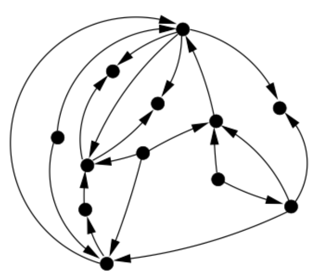
- لامپ اول روشن، لامپ دوم روشن، لامپ سوم روشن.
- لامپ اول خاموش، لامپ دوم روشن، لامپ سوم روشن.
- لامپ اول خاموش، لامپ دوم روشن، لامپ سوم خاموش.
- لامپ اول روشن، لامپ دوم روشن، لامپ سوم خاموش.

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ هـ) ۴

۳۲- ۶ نفر دور یک میز نشسته‌اند. ابتدا هرکس دقیقاً یکی از چشمان خود را می‌بندد. اگر کسی چشم راست خود را ببندد، همه‌ی سایر افراد به جز دو نفر سمت راستش را می‌تواند ببیند، و به طور مشابه، اگر چشم چپ خود را ببندد، دیگر افراد به جز دو نفر سمت چپش را می‌بیند. میزان «هم‌بینی» افراد دور یک میز، برابر تعداد جفت افرادی است که بتوانند هم‌دیگر را ببینند. در بین تمامی حالت‌های چشم بستنِ این ۶ نفر، حداکثر میزان «هم‌بینی» چه‌قدر است؟

الف) ۴ ب) ۶ ج) ۷ د) ۸ هـ) ۱۰

۳۳- هر سال، هر نهنگی که متوجه شود یکی از نهنگ‌هایی که او دوست داشته، سال گذشته مرده، خودکشی می‌کند. شکل روبرو یک جامعه از نهنگ‌ها را نشان می‌دهد. اگر نهنگ A به B پیکان داشته باشد، یعنی A، B را دوست دارد. حداقل چند پیکان جدید باید رسم کنیم تا نهنگی وجود داشته باشد که با کشتن آن، همه‌ی نهنگ‌ها از بین بروند؟



الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴ د) ۵ هـ) هیچ‌کدام

۳۴- بین شهرهای A و B یک جاده‌ی باریک وجود دارد. در این جاده ۱۰ تانکر بنزین، به ترتیب با شماره‌های ۱ تا ۱۰ پشت سر هم و با سرعت‌های متفاوت از A به سمت B در حرکت‌اند. در ابتدا هیچ دوتایی از تانکرها روی یک نقطه از جاده نیستند. راننده‌های این تانکرها خواب هستند و بنابراین از ترمز خبری نیست. اگر دو تانکر به هم برسند، هر دو منفجر و متلاشی می‌شوند به طوری که اثری از آن‌ها باقی نمی‌ماند. به این ترتیب تانکرهای بعدی می‌توانند از محل تصادف عبور کنند. اگر بدانیم که هیچ‌وقت بیشتر از دو تانکر در یک لحظه تصادف نمی‌کنند، مجموعه تانکرهایی که به شهر B می‌رسند، چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟

الف) ۵۵ ب) ۸۹ ج) ۱۴۴ د) ۵۱۲ هـ) ۱۰۲۴

۳۵- افشین روی نقطه‌ی ۰ محور اعداد حقیقی ایستاده است. او در هر حرکت، با توجه به شرایط زیر مقداری به سمت راست حرکت می‌کند.

- او در حرکت اول خود حداقل ۱ واحد و حداکثر ۸۵ واحد به سمت راست حرکت می‌کند.
- در صورتی که افشین در حرکت i اُم خود، a واحد به سمت راست رفته باشد،

- اگر a زوج باشد، او در حرکت $i+۱$ اُم، $\frac{a}{۲}$ واحد به سمت راست خواهد رفت.

- اگر a فرد باشد، او در حرکت $i+۱$ اُم، $۵۱۲+\frac{a-۱}{۲}$ واحد به سمت راست خواهد رفت.

پس از انجام ۱۰ حرکت، بیشترین مقداری که افشین می‌تواند به سمت راست رفته باشد چه‌قدر است؟

الف) ۶۱۳۸ ب) ۳۰۶۶ ج) ۵۱۱۵ د) ۶۱۴۴ هـ) ۳۰۶۹

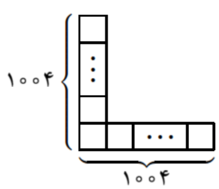
۳۶- ۴ نهنگ سفید و ۴ نهنگ سیاه به طور دسته‌جمعی تصمیم به خودکشی گرفته‌اند. در هر مرحله یک نهنگ، یکی از نهنگ‌های ناهمرنگ خود را انتخاب کرده و به قتل می‌رساند! می‌دانیم پس از ۷ مرحله، دقیقاً یک نهنگ، زنده مانده است. نهنگ‌ها از روی دنباله قتل‌ها، لیستی به نام «لیست سیاه» ساخته‌اند، به این ترتیب که پس از هر قتل، ابتدا رنگ قاتل، و سپس رنگ مقتول را به انتهای لیست اضافه می‌کنند. در پایان هم تن‌ها نهنگِ باقی‌مانده، رنگ خود را به انتهای لیست اضافه می‌کند. چند لیست سیاه متفاوت می‌تواند وجود داشته باشد؟

الف) ۱۲۸ ب) ۴۰ ج) ۷۰ د) ۱۴۰ هـ) ۳۲

۳۷- در سؤال قبل اگر به جای رنگ هر نهنگ، نام او (هم نام قاتل و هم نام مقتول) در لیست نوشته شود، چند لیست سیاه متفاوت می‌تواند وجود داشته باشد؟ (می‌دانیم هر نهنگ نامی دارد که با نام نهنگ‌های دیگر متفاوت است)

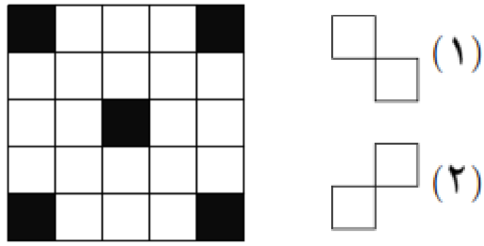
الف) ۱۰۴۸۵۷۶ ب) ۱۶۷۷۷۲۱۶ ج) ۴۰۳۲۰ د) ۲۳۰۴۰ هـ) ۲۷۸۳۲۳۲

۳۸- دو هزار و هفت عدد را در ۲۰۰۷ خانه‌ی شکل روبرو قرار داده‌ایم. در هر حرکت می‌توان ۱۰۰۴ عدد موجود در ستون را از بالا به پایین و یا ۱۰۰۴ عدد موجود در سطر را از چپ به راست، به صورت صعودی مرتب کرد. به یک جدول «پایدار» می‌گوییم اگر وضعیت آن جدول در صورت انجام هیچ یک از این مرتب‌سازی‌ها تغییر نکند. حداقل تعداد حرکاتی که می‌توان با آن‌ها هر جدولی را پایدار کرد چقدر است؟



الف) ۱۰۰۵ ب) ۱۰۰۷ ج) ۲۰۰۶ د) ۳۰۰۹ هـ) ۲۰۰۷

۳۹- به چند طریق می‌توان خانه‌های سفید شکل روبه‌رو را با ۱۰ تا از قطعه‌های (۱) و (۲) به طور کامل پوشاند؟



الف) ۶ ب) ۱۲ ج) ۱۸ د) ۱۶ هـ) هیچ‌کدام

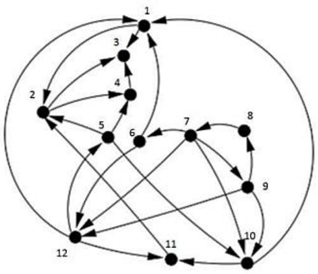
۴۰- استاد بزرگِ معبد شائولین، ۵ تن از بهترین شاگردانش را برای مبارزه به داخل معبد می‌فرستد تا با مبارزه با یکدیگر، رتبه‌بندی شوند. این ۵ تن بعد از چند شبانه‌روز مبارزه، یکی یکی از معبد خارج می‌شوند. اولین مبارزی که خارج می‌شود می‌گوید: «من اول شدم»؛ دومی می‌گوید:«من اول نشدم»؛ سومی می‌گوید:«من آخر نشدم»؛ چهارمی می‌گوید:«من نه اول شدم و نه آخر» و بالاخره آخرین مبارزی که از معبد خارج می‌شود می‌گوید: «من یا اول شدم یا آخر». استاد بزرگ نام همه‌ی مبارزان را می‌داند. همچنین می‌داند که یکی از ۵ مبارز به نام شائو همواره دروغ می‌گوید و بقیه همواره راستگو هستند. همین موقع استاد بزرگ می‌گوید: «لی! تو که باز آخر شدی!» با توجه به اینکه استاد بزرگ هیچ‌گاه اشتباه نمی‌کند، بگویید لی چندمین نفری بوده که از معبد خارج شده است؟ (توجه کنید که استاد بزرگ با توجه به اطلاعاتی که گفته شد، می‌توانسته مطمئن شود که لی آخر شده است.)

الف) اول ب) دوم ج) سوم د) چهارم هـ) پنجم

«پاسخنامه تشریحی»

۱- این سوال حذف شده است.

۲- گزینه ی (ه) درست است.



نهنگ ۳ در سال اول خودکشی می‌کند زیرا هیچ یالی به بیرون ندارد (هیچ کسی را دوست ندارد). سال دوم نهنگ چهار خودکشی می‌کند و.... اما هیچگاه همه‌ی نهنگ‌ها خودکشی نخواهند کرد. زیرا نهنگ های ۸ و ۹ و ۷ به صورت یک دور هستند و به دلیل اینکه رابطه دوست داشتن این سه نهنگ به صورت متوالی و به هم پیوسته است هیچ گاه هیچ کدام از آنها خودکشی نخواهد کرد. (زیرا همیشه کسی وجود دارد که مورد علاقه آنها باشد) در نتیجه گزینه ه جواب صحیح است.

۳- گزینه ی (ب) درست است.

شرکت D ادعا می‌کند که از بین شرکت آنها و شرکت A حداقل یکی گوشت فاسد می‌دهد. اگر خود شرکت D گوشت فاسد عرضه کرده باشد پس ادعایی که کرده درست بوده و به همین دلیل به نقایض می‌رسیم. پس شرکت D راستگو است. در نتیجه طبق ادعای او شرکت A دروغگو است. به همین دلیل ادعای او نیز رد شده و شرکت B راستگو خواهد بود. شرکت C هر دو شرکت A و B را دروغگو خوانده که ادعایی دروغ است بنابراین شرکت C نیز دروغگو است. پس دو شرکت B و D راستگو هستند. و گزینه ب صحیح است.

۴- گزینه ی (ه) درست است.

از آنجایی که می‌توانیم فرض کنیم مکعب‌ها در گوشه‌ها نیز اتصالات قوی برقرار خواهند کرد با در نظر گرفتن قطر اصلی مکعب که از n مکعب ۱×۱×۱ تشکیل شده است، می‌توانیم جسم مورد نظر را بسازیم. پس جواب صحیح گزینه ه خواهد بود.

۵- گزینه ی (ه) درست است.

برای nهای فرد نفر اول راهکار برد دارد به این صورت که هر دفعه در نوبت خود سمت راست ترین خانه‌ی خالی جدول را پر می‌کند ثابت می‌کنیم نفر دوم هیچ وقت نمی‌تواند مهره‌های سفید را سیاه کند زیرا هیچ وقت یک مهره‌ی سیاه در سمت راست یک مهره‌ی سفید قرار نمی گیرد چون همیشه سمت راست ترین خانه‌ی خالی را پر می‌کنیم. پس اگر یک مهره‌ی سیاه در سمت راست مهره‌ای که الان قرار می‌دهیم باشد آن مهره هم سفید می‌شود (زیرا سمت راست مهره های سیاه حتمن مهره‌ی سفید است) نفر دوم بهترین عملکرد خود را داشته باشد نفر اول حداقل یک مهره بیشتر از او می‌گذارد.

برای nهای زوج هر کدام از بازیکن‌ها راهکار نباختن دارد. هر دو به روش مشابه بالا سفید از سمت راست و سیاه از سمت چپ شروع به پر کردن می‌کند در نتیجه هر کدام حداقل به اندازه‌ی n/۲ از جدول را می‌پوشانند و نفر مقابل نمی‌تواند ببرد. در نتیجه گزینه ه درست است.

۶- گزینه ی (ج) درست است.

عدد ۱۳۸۵ در مبنای ۲ معادل ۱۰۱۰۱۱۰۱۰۰۱ است. از آنجایی که این عدد ۱۱ رقمی است و ۵ رقم صفر دارد کافی است ۵ عددکوچکتر از آن را بررسی کنیم که از مقدار ۱۳۸۵+۵ بیشتر خواهند شد یا خیر. زیرا تن‌ها در صورتی که یکی از این ۵ عدد تعداد صفرهای بیشتری نسبت به ۱۳۸۵ داشته باشد و اختلافش از ۱۳۸۵ کمتر از تعداد صفرهای بیشتر آن باشد، مقدار $k+f(k)$ بیشتر خواهد بود. برای چک کردن این ۵ عدد نیز با استفاده از تفریق پاینری به راحتی می‌توان دریافت که ۱۳۹۰ بزرگترین عددی است که می‌تواند وجود داشته باشد و جواب گزینه ج خواهد بود.

۷- **گزینه ی (ه) درست است.**

اگر فاصله‌ی نقطه مبدا تا نقطه مرکز دوران (a,b) باشد آنگاه نقطه مقصد نسبت به نقطه مبدا در مختصات $(a-b, a+b)$ قرار خواهد داشت. پس اگر بخواهیم نقطه مقصد (x,y) باشد، باید دستگاه معادله زیر را حل کرده و a و b را بیابیم.

$$a + b = x$$
$$a - b = y$$
$$a = \frac{(x+y)}{۲}$$
$$b = \frac{(x-y)}{۲}$$

برای اینکه a و b مقادیری صحیح داشته باشند کافی است x و y به شیمانه ۲ همنهشت باشند. این نکته در همه گزینه‌های داده شده صادق است. در نتیجه گزینه ه جواب درست است.

۸- **گزینه ی (ب) درست است.**

در صورتی که مطابق اعداد وارد شده در جدول زیر حرکت کنیم فقط لازم است در نقاط ۱۶،۱۳،۹،۵ و ۱۹ یک ریال هزینه کنیم. از آنجایی که این شیوه بیشترین تعداد حرکت به ازای هر یک ریال را خواهد داشت. ۲۱ جواب بیشینه برای این سوال خواهد بود و جواب گزینه ب است.

۱	۲	۳	۴	۵
۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۶
۱۵			۲۰	۷
۱۴			۲۱	۸
۱۳	۱۲	۱۱	۱۰	۹

۹- **گزینه ی (ج) درست است.**

می‌دانیم که تعداد روزها یا مساوی شب هاست و یا یکی بیشتر از آن است. روی تعداد روزها و شب‌ها حالت بندی می‌کنیم:

روزها	۱		۲		۳		۴		۵		۶	
شب‌ها	۰	۱	۱	۲	۲	۳	۳	۴	۴	۵	۵	۶
تعداد حالت‌ها	۰	۱	۵	۲۵	۵۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۵۰	۲۵	۵	۱

که جمع کل این اعداد برابر با ۴۶۲ است.

۱۰- **گزینه‌ی (ب) درست است.**

حالات مختلف را در این مسئله بررسی می‌کنیم تا استراتژی برد به دست آید: فرض کنید که ستون‌ها را از سمت چپ و سطرها را از بالا شماره گذاری کرده و همچنین هر گروه از نهنگ‌ها را از سمت چپ با ۱ تا ۵ شماره گذاری کرده ایم.

نفر اول مهره‌ی ۵ خود را به پایین سر می‌دهد. نفر دوم اگر مهره‌ی ۵ خود را سر دهد و در دو مرحله‌ی بعد خواهد باخت. اگر مهره‌ی ۳،۲ یا ۴ خود را سر دهد در مرحله‌ی بعد نفر اول همان مهره را به پایین سر می‌دهد و در دو مرحله‌ی بعد خواهد باخت. پس بهترین حرکت، سر دادن مهره‌ی ۱ به بالا خواهد بود. در اینصورت نفر اول مهره ۲ خود را به پایین سر می‌دهد.

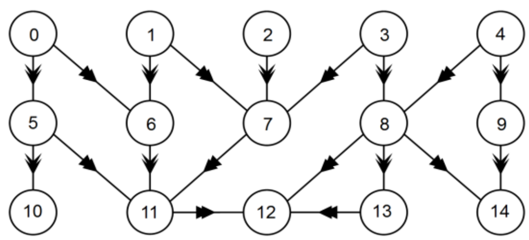
در این وضعیت نفر دوم اگر مهره‌ی ۲ تا ۵ خود را سر دهد، نفر اول در دو مرحله می‌تواند برنده شود. در نتیجه تن‌ها می‌تواند مهره‌ی ۱ را به چپ یا راست سر دهد (نمی تواند با پایین سر دهد چون حرکت تکراری است). حال نفر اول مهره‌ی ۲ خود را به چپ سر می‌دهد و سپس در دو مرحله‌ی بعدی می‌تواند برنده‌ی بازی شود. پس نفر اول می‌تواند در شش مرحله برنده بازی باشد.

۱۱- گزینه ی (الف) درست است.

برای گذاشتن عدد ۱ فقط یک راه داریم. برای گذاشتن عدد ۲ دو انتخاب خواهیم داشت یکی بالای خانه اول و یکی سمـت راست آن. بعد از قرار دادن عدد ۲ در یکی از این دو خانه برای قرار دادن عدد ۳ نیز ۲ انتخاب داریم چرا که اگر عدد دو را در خانه (۲,۱) قرار داده باشیم دیگر ۳ در خانه (۱,۲) نمی تواند قرار بگیرد و مجبور است در یکی از دو خانه (۲,۲) یا (۳,۱) قرار بگیرد. در نتیجه برای هر کدام از اعداد به جز یک دو حالت انتخاب داریم و به این ترتیب جواب مورد نظر $۲^{۱۳}$ خواهد بود که گزینه الف است.

۱۲- گزینه (د) درست است.

در بالا ۱۵ دفتر را به صورت شماره گذاری شده مشاهده می‌کنید. برای اینکه محاسبه کنیم در نهایـت به هر کدام از دفاتر ۱۰ تا ۱۴ چند نامه می‌رسد، کافی است که تعداد نامه های آنها را بر حسب تعداد نامه های دفاتر ۰ تا ۴ محاسبه کنیم.



$$۱۰ = ۰$$
$$۱۱ = ۰ + (۰+۱) + (۱+۲+۳)$$
$$۱۲ = (۰ + (۰+۱) + (۱+۲+۳)) + (۳+۴) + ((۳+۴))$$
$$۱۳ = (۳+۴)$$
$$۱۴ = (۳+۴) + ۴$$

جمع کل: $۵\times۰ + ۴\times۱ + ۲\times۲ + ۶\times۳ + ۵\times۴$

به دفتر kام در کل به مقدار زیر نامه خواهد رسید:

$$k \times ۲۰۰۷ + \frac{(۲۰۰۷ \times ۲۰۰۸)}{۲} = ۲ * k + ۳ (\mathrm{mod}\, ۵)$$

در نتیجه درکل جمع کل به پیمانه ۵ برابر با ۳ خواهد بود و گزینه د صحیح است.

۱۳- گزینه‌ی (د) درست است.

این جوجه در صورتی کمترین تعداد حرکت را خواهد داشت که حرکت تکراری انجام ندهد. زیرا در صورت تکرار به جای اینکه یکبار از دو برابر آن عدد که جز انتخابهایش نیز بوده است استفاده کند دوبار از آن عدد استفاده کرده است. در نتیجه باید از حرکت‌های زیر استفاده کنـد:

$$۹۹ = ۶۴ + ۳۲ + ۲ + ۱$$
$$۵۹ = ۳۲ + ۱۶ + ۸ + ۲ + ۱$$

اگر اندازه حرکات یکسان بود به تعداد $\binom{۹}{۴}$ انتخاب برای رسیدن به نقطه نهایی داشتیم. چون همه حرکات یکسان نیستند این عدد باید مقدار زیر باشد:

$$\binom{۹}{۴} \times ۵! \times ۴! = ۳۶۲۸۸۰$$

۱۴- گزینه ی (ج) درست است.

می‌دانیم که برای رسیدن از A به B دقیقا باید یک عمل بالا، یک راست و یک عقب انجـام شود. در نتیجه بایـد جایگشـتی از RUB را داشته باشیم. برای اینکه در حرکت پنجم در نقطه B باشیم باید دقیقا یک حرکت به صورت رفت و برگشت اضافه انجام شود. حالت اول فرض می‌کنیم دو حرکت اضافه شده حرکت به راست و چپ است. در نتیجه باید جایگشتی از رشته $RRLUB$ به عنوان دنباله حرکات انتخاب شود. پس تعداد روشها برای این حالت !۵ است ولی باید این نکته را در نظر داشت که حرکت به سمت راست و چپ قابلیت جابجایی ندارند. یعنی نمی‌توانیم ابتدا به سمت چپ حرکت کرده و سپس دو ابر به سمت راست حرکت کنیم زیرا از مکعب خارج خواهیم شد. برای حل این مشکل فرض کنیم سه حرف RRL با یکدیگر فرقی ندارند و در عوض باید به ترتیب RLR در دنباله بیایند. در نتیجه برای حالت اول به اندازه $\frac{5!}{3!}$ روش وجود دارد. حالت دوم به صورتی است که به جای اضافه شدن دو حرکت راست و چپ اضافه دو حرکت بالا و پایین اضافه داشته باشیم یعنی رشته به صورت $RUDUB$ در بیاید. و برای حالت سوم نیز رشته باید به صورت $RUBFB$ باشد. دو حالت فوق همانند حالت اول محاسبه خواهند شد و در کل ۶۰=۳×۲۰ روش داریم که همان گزینه ج است.

۱۵- گزینه ی (د) درست است.

برای این که یک توپ در آخر سالم باقی بماند باید حداقل یک توپ در یکـی از خانه‌هـای جلـوی آن بترکد (یعنی خانه‌های بزرگترش) از طرفی یک توپ که منفجر شود فقط می‌تواند یک توپ به تعداد توپ‌هایی که قرار است آخرش بماند اضافه کند. از آنجا که حداقل نصف روزها داریم توپ می‌ترکانیم پس حداکثر ۱۲ تا توپ داریم که برای هر توپ حتمن یک توپ در خانه‌ای با عدد بیشتر ترکیده بوده پس جمع اعداد خانه‌هایی که در آخر در آنها توپ است نمی‌تواند از نصف بیشتر باشد.

حال اگر روز اول توپ را در خانه‌ی یک بگذاریم و از این به بعد روز $2i$ توپ را در خانه‌ی $2i+1$ بگذاریم و روز بعدش توپ را در خانه‌ی $2i$ بگذاریم در این صورت توپ خانه‌های ۱ تا $2i$ نمی‌ترکد و در آخر توپ در خانه‌های زوج است که جمع آنها می‌شود ۲۷۲.

۱۶- گزینه‌ی (د) درست است.

اگر عدد وسط $3k+x$ باشد ۴ خانه مجـاور آن $3k''+x, 3k'+x, 3k+x'', 3k+x'$ اسـت. $3k+x'', 3k+x'$ به جـز همیـن $3k+x$ همسایه مشترک دیگری نمی‌توانند داشته باشند (چرا؟) همینطور $3k''+x, 3k'+x$ همسایه مشترک دیگری ندارند. $3k'+x, 3k+x'$ دو همسایه دارند که یکی همان $3k+x$ و دیگری $3k'+x'$ است. به همین ترتیب ۳ جفت دیگر فقط یک همسایه مشترک دیگر دارند. پس به ۴ حالت $3k+x'$ را در یکی از ۴ خانه مجاور خانه وسط می‌گذاریم و $3k+x''$ را به اجبار در خانه‌ی مقابل آن می‌گذاریم و برای دو عدد دیگر ۲ حالت داریم. اعداد ۴ گوشه نیز یکتا تعیین می‌شوند. پس به ازای هر عددی که وسط باشد ۲×۴ حالت وجود دارد و در کل ۷۲ حالت داریم.

۱۷- گزینه‌ی (ج) درست است.

واضح است که تعداد حرکات واقعی از تعداد حرکات تخمین زده شده بیشتر است. زیرا میزان تخمین برای زمانی است که بتوان به صورت مستقیم خانه‌ها را جابجا کرد ولی می‌دانیم برای جابجا شدن یک خانه ممکن است مجبور به جابجایی خانه‌های دیگر نیز بشویم که این باعث بروز حرکاتی بیشتر از مقدار تخمین زده شده خواهد شد. از طرفی برای برخی جدولها این مقدار بیش از ۲ برابر مقدار تخمین زده شده خواهد بود. شکل زیر را در نظر بگیرید:

۳	۲	۱
۶	۵	۴
	۷	۸

۱۸- **گزینه‌ی (الف) درست است.**

می‌خواهیم ثابت کنیم تعداد حالات بر !۱۳۸۵ بخش پذیر است. فرض کنید برای هر سطر اولین زمانی که خرگوشی را در آن کشتیم شماره‌ی آن سطر را روی تخته می‌نویسیم. بدین ترتیب یک جایگشت از سطرها روی تخته نوشته می‌شود. حال در نظر داشته باشید که تعداد حالاتی که یک جایگشت را می‌سازند با یکدیگر برابرند چون با جایگزین کردن سطرها قوانین مسئله حفظ می‌شود و در نتیجه به ازای هر حالتی از یک جایگشت، یک حالت متناظر برای جایگشت‌های دیگر نیز وجود دارد (می‌توان همین روند را برای ستون‌ها نیز بیان کرد). در نتیجه پاسخ مسئله بر !۱۳۸۵ بخش پذیر است و باقیمانده ی آن بر ۲۳ صفر خواهد بود.

۱۹- **گزینه‌ی (د) درست است.**

برای اینکه یک امتیاز بگیریم باید حداقل یک سطر و یک ستون را به صورت کامل پر کرده باشیم. همچنین از هیچ سطر و ستونی برای گرفتن امتیاز نمی‌توان استفاده کرد (یعنی هیچ گاه نمی‌توان در یک سطر یا ستون دو بار امتیاز گرفت زیرا در این صورت فرض سوال نقض می‌شود). در نتیجه حداکثر امتیاز که می‌توان کسب کرد به تعداد سطرها (یا ستون ها) است. برای رسیدن به این مقدار ابتدا همه خرگوشهای داخل جدول به جز قطر اصلی را می‌کشیم (این کار به دلیل پیوسته بودن مجاورت قابل اعمال است) سپس با کشت هر یک از خرگوش های روی قطر یک امتیاز خواهیم گرفت. پس جواب صحیح گزینه د است.

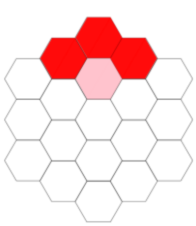
۲۰- **گزینه‌ی (د) درست است.**

هر w را با صفر و هر b را با یک متناظر می‌کنیم تا به یک رشته‌ی باینری برسیم با این تفاوت که در این رشته کم ارزشترین رقم، رقم سمت چپ است. هر عمل به روز رسانی روی حرف iام رشته مشابه اضافه کردن عدد 2^{i-1} به عدد باینری آن است. پس با انجام عملیات گفته شده در سوال به عدد ۶۶۶ می‌رسیم که تعداد ارقام یک باینری آن ۵ تاست.

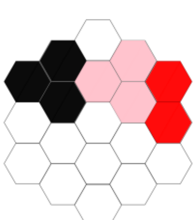
۲۱- **گزینه‌ی (ب) درست است.**

دو حالت زیر تنها حالت های مطلوب ما هستند زیرا تنها خانه ای که می‌تواند خالی بماند خانه وسط است (در ادامه اثبات می‌کنیم).

خانه صورتی نمی‌تواند خالی بماند زیرا در آن صورت خانه های قرمز دچار مشکل شده و نمی‌توانند همزمان پر شوند.



در صورتی که بخواهیم گوشه خالی بماند خانه های قرمز رنگ مشخص شده دچار مشکل خواهند شد.



در شکل زیر نیز خانه سفید خالی مانده است ولی خانه‌های قرمز راهی برای پر شدن ندارند.

به این ترتیب جواب گزینه ب خواهد بود و تنها حالت های مطلوب همان حالت های پیشین خواهد بود.

۲۲- گزینه‌ی (ج) درست است.

تفاوت ۸ و ۹ تنها در خانه چپ پایین است در نتیجه این خانه باید سالم باشد.

تفاوت یک و هفت تنها در خانه بالا است که این خانه نیز باید سالم بماند.

تفاوت ۸ و ۰ نیز تنها در خانه وسط است.

تفاوت ۶ و ۸ نیز تنها در خانه راست بالا است.

۲ و ۸ نیز در دو خانه تفاوت دارند که هیچکدام از آنها در تفاوت های پیشین نبود. با انتخاب لامپ سالم برای راست پایین این مشکل نیز رفع خواهد شد. در نتیجه گزینه ج جواب صحیح است.

۲۳- گزینه‌ی (ج) درست است.

به ازای ۴ و ۷ و ۱۰ می‌توان با انتخاب های زیر مثلث را پاک کرد:

۴: چهار تا مثلث ۴ تایی.

۷: سه تا مثلث ۴تایی و ۴ تا مثلث واحد.

۱۰: دو تا مثلث ۴ تایی و ۸ تا مثلث واحد.

به طور کلی فقط اعداد زیر را می‌توان انتخاب کرد: یک ۹تایی و ۷ تا یکی، چهار ۴تایی، سه ۴تایی و ۴ تا یکی، دو ۴تایی و ۸ تا یکی، یک ۴تایی و ۱۲ تا یکی و ۱۶ تا یکی.

۲۴- گزینه‌ی (ج) درست است.

بدیهی است اگر از همه اعداد مجموعه ۱۵ را کم کنیم تغییری در کلیت مسئله داده نمی‌شود و مجموعه به صورت زیر درمی‌آید:

{۰,۴,۸,۱۲,۱۶,۲۰,۲۴}

با توجه به اینکه همه اعداد بر ۴ بخش پذیر هستند می‌توانیم همه اعداد را بر ۴ تقسیم کنیم و هم چنان در کلیت مسئله تفاوتی ایجاد نخواهد شد. مجموعه جدید تبدیل خواهد شد به:

{۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶}

این مجموعه ۱۳ عدد متمایز تولید می‌کند زیرا جمع کوچکترین‌ها ۶ و جمع بزرگترین‌ها ۱۸ خواهد بود که همه اعداد بین این دو نیز توسط ۴ عدد متمایز مجموعه ساخته خواهند شد (این رخداد به دلیل پیوستگی مجموعه و وجود صفر در آن است). هر کدام از مجموع‌هایی که بدست می‌آیند با ضرب در ۴ و جمع با ۱۵ به یکی از مجموع‌های مجموعه‌ی اولیه تبدیل خواهند شد. پس جواب گزینه ج خواهد بود.

۲۵- گزینه‌ی (ج) درست است.

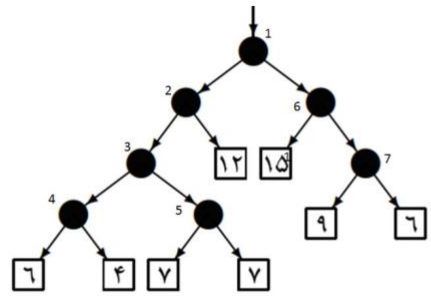
از آنجایی که از هر دو جهت دایره باید نخود عبور کند پس هر دایره حداقل یکبار تغییر جهت نیاز دارد.

از طرفی نخودهایی که از هر دو جهت هر دایره (به جز دایره‌ی سمت راست پایین) باید عبور کنند متفاوتند، پس باید قبل از تغییر جهت بدانیم نخودها در چه جهتی می‌رفتند. در نتیجه در کل به ۶+۵ عمل تغییر جهت نیاز داریم.

ابتدا با ۵ حرکت جهت همه ی دایره‌ها را می‌فهمیم به جز دایره‌ی سمت راست پایین که مهم نیست در چه جهتی باشد. سپس هر کیسه که پر شد به ترتیب از پایین دایره‌ها را تغییر می‌دهیم تا همه ی کیسه‌ها پر شود.

۲۶- **گزینه‌ی (الف) درست است.**

شروع به انداختن نخودها می‌کنیم تا زمانی که یکی از خانه‌ها پر شود. در اینصورت جهت پدر آن گره را متوجه می‌شویم. با تغییر جهت آن دایره مربع دیگری شروع به پرشدن می‌کند. پس از اینکه آن خانه نیز پر شود جهت پدر آن را تغییر می‌دهیم تا زمانی که همه مربع‌ها پر شوند. هر دایره نهایتاً یک بار تغییر جهت می‌دهد. در نتیجه به تعداد خانه‌های دایره‌ای احتیاج به تغییر داریم. به مثال زیر توجه کنید:



فرض کنید شروع به ریختن نخود می‌کنیم و پس از تعدادی حرکت مربع ۱۵تایی پر می‌شود. جهت دایره ۶ را عوض می‌کنیم و خانه ۹تایی شروع به پر شدن می‌کند سپس با عوض کردن دایره ۷ مربع ۶ تایی شروع به پر شدن می‌کند. پس از آن دایره شماره ۱ را تغییر جهت می‌دهیم و به همین ترتیب تا همه مربع‌ها پر شوند. واضح است که با ۷ حرکت همه مربع‌ها پر خواهند شد.

۲۷- **گزینه‌ی (ج) درست است.**

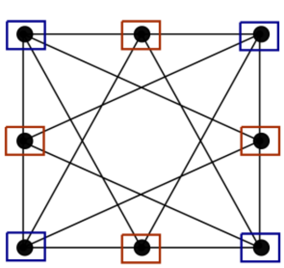
می‌دانیم اگر فردی بمیرد مشخص می‌شود که یکی از دو شرکت سازنده کنسرو او کنســرو فاسد تولید می‌کنند. در نتیجه این دو شرکت در غذای هر کدام از افراد دیگر آمده باشند شرکت فاسد مشخص خواهد شد (اگر شرکت سالم در غذای فردی بیاید او نخواهد مرد زیرا فقط یک شرکت فاسد داریم و در این صورت شرکت فاسد مشخص می‌شود و در صورتی که شرکت فاسد در غذای فردی دیگر بیاید او خواهد مرد و در این صورت نیز شرکت فاسد شناسایی خواهد شد). پس تن‌ها حالت ممکن این است که شرکت فاسد و شرکتی که با شرکت فاسد آمده است دیگر در هیچ گروهی نیایند که در این صورت بقیه شرکت‌ها $\binom{۸}{۲} = ۲۸$ حالت امکان تشکیل گروه را دارند. پس در کل ۲۹ دسته می‌توانند تشکیل شوند که باعث کشته شدن فقط یک نفر خواهند شد و شرکت فاسد نیز مشخص نخواهد شد.

۲۸- **گزینه‌ی (د) درست است.**

پینوکیو به جز مرحله‌ی اول همواره از یک مسیر وارد سه راهی شده و در نتیجه تن‌ها دو مسیر پیش رو دارد. پس هر بار در بدترین حالت مجبور است یکی از سه راهی‌ها را برود و برگردد و سپس وارد مسیر درست شود. در نتیجه هر بار ۳ متر را طی می‌کند و در ازای آن یک متر از فاصله او با پدر ژپتو کاسته خواهد شد. البته در مرحله‌ی اول باید ۵ متر طی کند. پس در کل ۴۱۵۷ = ۲+۳ × ۱۳۸۵ متر باید بپیماید.

۲۹- **گزینه‌ی (ه) درست است.**

همانطور که در شکل نشـان داده شـده این گـراف دو بخشی است و به همین دلیل هر کدام از دسته‌های نارنجی و آبی مربوط به یکی از دو نفر خواهند بود. در صورتی که نیلوفر شروع کننده بازی باشد با نگاه کردن به دفترچه و جمع زدن عوارض نارنجی و جمع زدن عوارض آبی می‌تواند بفهمد کدام دسته مجموع قیمت های کمتری دارد و آن را انتخاب کند و در نهایت نیلوفر قیمت کمتری خواهد پرداخت. در نتیجه مقداری که نیلوفر خرج می‌کند کمتر مساوی مقداری است که لیلی خرج می‌کند.



۳۰- **گزینه‌ی (الف) درست است.**

ثابت می‌کنیم:

$$W_A = W_B, W_C = W_D + ۲, W_E = W_F, W_G = W_H$$

برای دو نقطه مثل B،A اگر بالاترین خیابان هر کدام از این ستون ها، خیابان بین این دو باشد تناظری یک به یک بین مسیرهای منتهی به این نقاط وجود دارد. چرا که برای رسیدن به این نقاط باید به ارتفاع خیابان بین این دو برسیم و در این حالت به ازای هر مسیر به A یک مسیر نیز به B وجود دارد. در نتیجه تعداد مسیرهای منتهی به این نقاط با یکدیگر برابرند. این استدلال برای زوج نقاط E,F و G,H نیز درست است.

ولی برای نقاط C,D شرایط فرق می‌کند. اگر فرض کنیم خیابان بین B و C وجود ندارد بقیه مسیرها با هم متناظر هستند. پس کافی است که تن‌ها مسیرهایی را محاسبه کنیم که از این خیابان استفاده می‌کنند و به C ختم می‌شوند. با توجه به آینه تن‌ها می‌توان به سمت بالا، چپ و راست حرکت کرد تن‌ها دو مسیر با این ویژگی وجود دارد. پس مجموع یاد شده در مساله برابر با (۲-) است.

۳۱- **گزینه‌ی (ه) درست است.**

در صورتی که وضعیت لامپ‌های ردیف اول را مشخص کنیم، بقیه ردیف‌ها وضعیت یکتایی خواهند داشـــت که از یک الگو تبعیت می‌کند. کافیست که به ازای حالات مختلف الگوها را بیابیم.

به ازای هر ردیف هشت حالت مختلف از تغییرات وجود دارد. دنباله‌ی تغییرات لامپ‌ها در طبقات مختلف چهار حالت مختلف هستند.

در هر الگو پس از رسیدن به حالت نهایی، الگو دوباره تکرار می‌شود (نقطه نماد خاموشی و عدد نماد روشنی است).

الگوی اول:

۱..

۱۲.

..۳

.۲۳

۱..

الگوی دوم:

.۲.

۱۲۳

.۲.

الگوی سوم:

...

الگوی چهارم:

۱.۳

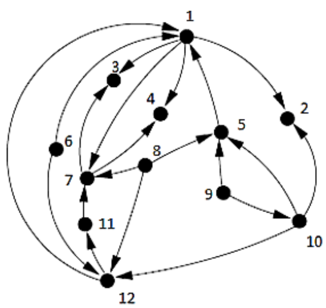
با این روند تمام حالات برای ردیف دهم ممکن خواهد بود. پس پاسخ برابر هر چهار حالت داده شده است.

۳۲- **گزینه‌ی (ج) درست است.**

در صورتی که افراد دور دایره را شماره گذاری کنیم، در صــورتــی که نفر اول و نفر چهارم چشم راست و بقیه چشم چپ خود را ببندند، ۷ جفت آدم یکدیگر را می‌بینند.

حال ثابت می‌کنیم این تعداد بیشترین تعداد جفت آدم ممکن است. در کل تعداد هم بینی های ممکن $\binom{۶}{۲}=۱۵$ تاست. از طرفی می‌دانیم از این تعداد حداقل $\frac{۲\times ۶}{۲}$ هم بینی به دلیل ندیدن افراد مجاور حذف خواهد شد. در نتیجه حداکثر ۹ هم بینی می‌ماند. همچنین سه نفر مجاور که هم بینی ندارند را در نظر بگیرید، نفر سمت چپ چشم سمت راست خود را بسته است و نفر سمت راست چشم سمت چپ خود. این نا هم بینی‌ها در کسر فوق محاسبه شده‌اند ولی نفر وسط به هر طریقی که چشم خود را ببندند یکی دیگر به جز دو نفر مجاور خود را نخواهد دید در نتیجه یک واحد به کسر بالا اضافه خواهد شد. به ازای هر سه نفر که هم بینی ندارند و مجاور هستند یکی به کسر فوق اضافه می‌شود چون تعداد افراد ۶ است در کل ۸ هم بینی از بین می‌روند. در نتیجه بیشتر از ۷ هم بینی امکان پذیر نیست.

۳۳- گزینه‌ی (الف) درست است



نهنگ‌هایی که کسی را دوست ندارند (به کسی یال ندارند) در هر صورت خودکشی نمی‌کنند، پس از هر کدام از این نهنگ‌ها باید یک نهنگ دیگر را دوست داشته باشد. نهنگ های ۳،۲ و ۴ به هیچ نهنگی پیکان ندارند پس حتی اگر یکی از این نهنگ‌ها را نیز در ابتدا بکشیم دو نهنگ دیگر باید یک پیکان خروجی داشته باشند تا خودکشی کنند.

اگر دو پیکان از نهنگ های ۳ و ۴ به نهنگ ۲ بکشیم، بعد از کشتن نهنگ ۲، همه‌ی نهنگ‌ها بعد از چند مرحله خودکشی می‌کنند.

۳۴- گزینه‌ی (ب) درست است.

$f(n)$: تعداد حالت‌هایی که تانکرها به مقصد می‌رسند اگر در آغاز n تانکر داشته باشیم (و هر تانکر تن‌ها با تانکرهایی تصادف کند که دارای عددهای متوالی هستند).

روی اولین تانکر حالت بندی می‌کنیم:

۱-به مقصد می‌رسد:

در اینصورت تانکر اول با هیچ تانکری برخورد نکرده است پس تعداد حالت‌ها برابر است با $f(n-۱)$.

۲-به مقصد نمی رسد:

در این حالت تانکر اول با تانکر دوم برخورد کرده است. پس ۲ تانکر اول حذف می‌شوند و تعداد حالت‌ها برابر است با $f(n-۲)$.

در نتیجه $f(n)=f(n-۱)+f(n-۲)$ که با توجه به حالت‌های اولیه داریم: $f(۱۰)=۸۹$.

۳۵- گزینه‌ی (الف) درست است.

برای اینکه بیشترین تعداد حرکات را داشته باشیم باید به بیشترین عدد فرد برسیم.

اعداد را در مبنای ۲ در نظر می‌گیریم در هر مرحله اگر عدد زوج باشد صفر جلوی عدد را برمی‌داریم و اگر عدد فرد باشد، ۱ جلوی عدد را برداشته و به آن ۵۱۲ تا اضافه می‌کنیم.

پس بیشترین تعداد دفعاتی که می‌توانیم عدد فرد داشته باشیم حالتی است که بیشترین تعداد ۱ ممکن را در مبنای ۲ عدد ابتدایی داشته باشیم.

در نتیجه عدد ابتدایی باید ۶۳ باشد که تعداد حرکات ممکن با انتخاب ۶۳ برابر است با ۶۱۳۸.

۳۶- **گزینه‌ی (ب) درست است.**

از آنجایی که با دانستن رنگ قاتل می‌توان رنگ مقتول را فهمید، دنبالـه‌ای را در نظر می‌گیـریم که در آن فقط رنگ قاتل‌ها را نوشتـه‌ایم. آخرین قاتل همان نهنگ بازمانده است پس آخرین نهنگ مقتول از رنگ مخالف آن است. در نتیجه از مرحله اول تا قبل از مرحله‌ی آخر از هر دو رنگ حتمن حداقل یک نهنگ داریم. پس قاتل‌ها به هر ترتیبی می‌توانند باشند.

فرض می‌کنیم نهنگ آخر سفید باشد (چون حالت‌ها متقارن‌اند). در نتیجه قاتل آخر نیز سفید است. در دنباله ۶ جای خالی داریم که با ۳ سیاه و ۳ سفید پر می‌شوند که تعداد حالت‌ها برابر ۲۰ می‌باشد.

در نتیجه کل حالت‌ها ۴۰ تاست.

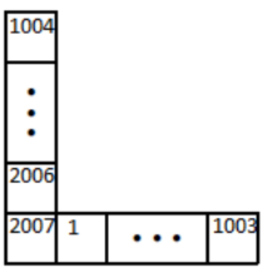
۳۷- **گزینه‌ی (د) درست است.**

پس از اینکه در سوال قبل تعداد روش‌ها را یافتیم باید نام نهنگ‌ها را در لیست بنویسیم. برای اینکار می‌توانیم تعداد روش‌ها را در $4! \times 4!$ ضرب کنیم که در نهایت عدد ۲۳۰۴۰ بدست خواهد آمد.

۳۸- **گزینه‌ی (ه) درست است.**

ثابت می‌کنیـم حداکثـر تعداد حرکات لازم ۲۰۰۷ تاست. می‌تـوانیـم هر جدول را با ۲۰۰۷ حرکت طـوری مرتـب کنیـم که به ترتیب در خانه‌های ۱ تا ۲۰۰۷ قرار بگیرند.

در هر مرحله کمترین عضوی (کمتر از ۱۰۰۴) که در جای خود نباشد را پیدا کرده و با حداکثر ۲ حرکت در جای خود قرار می‌دهیم (اگر این عدد در ستون بود با یک بار مرتب سازی ستون و اگر در سطر بود ابتدا سطر را مرتب کرده چون کوچکترین عدد است به ابتدای سطر می‌آید سپس ستون را مرتب می‌کنیم.).



پس ستون جدول را با ۲۰۰۶ حرکت پر می‌کنیم، سپس با یک حرکت سطر جدول را که شامل ۱۰۰۴ عدد بزرگتر است مرتب می‌کنیم.

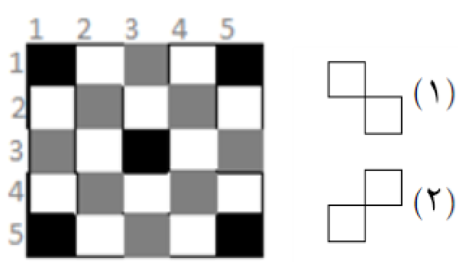
حال مثالی ارائه می‌دهیم که دقیقا ۲۰۰۷ حرکت لازم داشته باشد.

در این جدول حرکات یکتا هستند (دو حرکت مشابه پشت هم بیهوده است از طرفی اولین حرکت باید روی سطر باشد).

در هر ۲ حرکت دقیقن یک عدد در ستون سر جای خود قرار می‌گیرد.

۳۹- **گزینه‌ی (د) درست است.**

جدول را به صورت رو به رو شطرنجی رنگ می‌کنیم. چون هر قطعه دو خانه از یک رنگ را پر می‌کند، پس پر کردن خانه‌های سفید و خانه‌های خاکستری مستقل از هم هستند.



برای پر کردن خانه‌های خاکستری تن‌ها ۲ حالت داریم (خانه‌ی (۱,۳) با چه خانه‌ای جفت شود).

برای خانه‌های سفید روی جهت قطعه‌های (۱,۲) و (۱,۴) و (۵,۲) و (۵,۴) حالت بندی می‌کنیم:

۱-در همه ی این خانه‌ها قطعه اول را بگذاریم (بقیه خانه‌ها یکتا تعیین می‌شوند).

۲-در همه ی این خانه‌ها قطعه دوم را بگذاریم (بقیه خانه‌ها یکتا تعیین می‌شوند).

۳- در خانه‌های (۵,۴) و (۱,۲) قطعه‌ی اول و در دو خانه‌ی دیگر قطعه‌ی دوم را قرار دهیم در اینصورت بقیه خانه‌ها دو حالت دارند.

۴-در قسمت بالا برای دقیقن یک خانه از این ۴ خانه جهت قطعه را عوض کنیم در اینصورت بقیه خانه‌ها یکتا تعیین می‌شوند.

پس در کل ۸ حالت برای چینش خانه‌های سفید داریم. در نتیجه برای کل جدول ۱۶ حالت داریم.

۴۰- **گزینه‌ی (ب) درست است.**

از آنجایی که لی، شائو نیست! پس دروغگو آخر نشده.

نفر دوم نمی‌تواند دروغگو باشد چون در اینصورت دو نفر اول شده‌اند.

نفر سوم نمی‌تواند دروغگو باشد چون در اینصورت نفر پنجم و نفر اول، اول شده‌اند.

نفر چهارم دروغگو نیست چون اگر دروغگو باشد یا اول شده یا آخر و چون نفر اول، اول شده پس او آخر شده در حالی که دروغگو نباید آخر شده باشد!

نفر اول هم دروغگو نیست چون در اینصورت هم نفر دوم هم نفر پنجم می‌توانند اول شده باشند (که استاد نمی‌توانسته مطمئن باشد چه کسی اول می‌شود). در نتیجه نفر پنجم دروغگوست و نفر دوم آخر شده است.